SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT PHÙNG KHẮC KHOAN
- THẠCH THẤT -

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG

Năm học: 2019 - 2020

Môn thi : Toán lớp 11

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1.*(2,5 điểm)*

Giải phương trình: $\dfrac{\tan^2 x+\tan x}{\tan^2(x+3\pi)+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x+\dfrac{9\pi}{4}\right)$

Câu 2.*(4,5 điểm)*

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt[3]{3x+2}-1=\sqrt{2y-1}\\ 2x^3-(4y-1)x^2-(2y-1)x=2y\end{cases}$

b) Tìm giới hạn sau: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x\sqrt{3x-5}+\sqrt[3]{2x-3}-3}{x^2-4}$

Câu 3.*(3,0 điểm)*

a) Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $C_{n+4}^{n+1}-4n=C_{n+3}^{n}+8$. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $P=x(1-2x)^n+x^2(1+3x)^{2n}$.

b) Cho tập hợp $X=\{0;1;2;3;4;5;6\}$. Gọi Ω là tập hợp các số tự nhiên chẵn có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các phần tử của *X*. Lấy ngẫu nhiên 2 số tự nhiên từ Ω. Tính xác suất sao cho 2 số được chọn chia hết cho 5.

Câu 4.*(3,0 điểm)*

Cho dãy số (u_n) có $\begin{cases}u_1=2011, u_2=2014\\ u_{n+2}=\dfrac{5}{3}u_{n+1}-\dfrac{2}{3}u_n, n\in N^*\end{cases}$

a) Đặt $v_n=u_{n+1}-u_n, \forall n\in N^*$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) là một cấp số nhân.

b) Tính giới hạn $\lim u_n$

Câu 5.*(5,0 điểm)*

a) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên đường chéo *AC* lấy điểm *M* sao cho $MA=3MC$. Mặt phẳng (α) đi qua *M* và song song với mặt phẳng $(A'BD)$. Xác định thiết diện của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ khi cắt bởi mặt phẳng (α).

b) Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình vuông cạnh *a* và các cạnh bên đều bằng *a*. Gọi *M* là điểm nằm trên *SB* sao cho $\overrightarrow{SM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{SB}$. Gọi *(P)* là mặt phẳng chứa *CM* và song song với *SA*. Tính theo *a* diện tích của thiết diện tạo bởi *(P)* và hình chóp *S.ABCD.*

Câu 6.*(2,0 điểm)*

Cho 3 số thực dương *a, b, c* thoả mãn *a.b.c = 1*. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(b+a)}.$$

------ ***Hết*** ------

Họ và tên thí sinh: .... ***Số báo danh:*** ....

SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT PHÙNG KHẮC KHOAN
-THẠCH THẤT-

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG
Lớp: ***11*** **- Năm học:** *2019 - 2020*
Môn: *Toán* **Thời gian:** *150 phút*

Câu 1.*(2,5 điểm)* Giải phương trình: $\dfrac{\tan^2 x+\tan x}{\tan^2(x+3\pi)+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x+\dfrac{9\pi}{4}\right)$

Điều kiện $\cos x \neq 0$	0.25
PT $\Leftrightarrow 2\cos^2 x(\tan^2 x+\tan x)=\sin x+\cos x \Leftrightarrow 2\sin x(\sin x+\cos x)=\sin x+\cos x$	0.5
$\Leftrightarrow (2\sin x-1)(\sin x+\cos x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{1}{2}\\ \tan x=-1\end{array}\right.$	0.5
Với $\sin x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi;\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi, k\in Z$ (thỏa mãn đk)	0.5
Với $\tan x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in Z$ (thỏa mãn đk)	0.5
Vậy PT có 3 họ nghiệm $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi;\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi; x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\ \ (k\in Z)$	0.25

Câu 2a.*(2,0 điểm)* a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt[3]{3x+2}-1=\sqrt{2y-1} & (1)\\ 2x^3-(4y-1)x^2-(2y-1)x=2y & (2)\end{cases}$

Đk: $y\geq\dfrac{1}{2}$	0.25
Từ pt (2) của hệ ta có $(x-2y)(2x^2+x+1)=0\Leftrightarrow x=2y$ Thế vào pt (1) của hệ ta được $\sqrt[3]{3x+2}-\sqrt{x-1}=1$	0.5
Đặt $\begin{cases}u=\sqrt[3]{3x+2}\\ v=\sqrt{x-1}\ \ (v\geq 0)\end{cases}$ ta được hpt sau $\begin{cases}u-v=1\\ u^3-3v^2=5\end{cases}$	0.5
Giải hệ được $\begin{cases}u=2\\ v=1\end{cases}$	0.5
Từ $\begin{cases}u=2\\ v=1\end{cases}\Rightarrow x=2\Rightarrow y=1$ KL: Vậy hệ có nghiệm duy nhất (2; 1)	0.25

Câu 2.*(2,5 điểm)* b) Tìm giới hạn sau: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x\sqrt{3x-5}+\sqrt[3]{2x-3}-3}{x^2-4}$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x\sqrt{3x-5}+\sqrt[3]{2x-3}-3}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{x\sqrt{3x-5}-2}{x^2-4}+\dfrac{\sqrt[3]{2x-3}-1}{x^2-4}\right]$	0.5
$=\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{x^2(3x-5)-4}{(x^2-4)\left(x\sqrt{3x-5}+2\right)}+\dfrac{2x-3-1}{(x^2-4)\left(\left(\sqrt[3]{2x-3}\right)^2+\sqrt[3]{2x-3}+1\right)}\right]$	0.5
$=\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{(x-2)(3x^2+x+2)}{(x-2)(x+2)\left(x\sqrt{3x-5}+2\right)}+\dfrac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)\left(\left(\sqrt[3]{2x-3}\right)^2+\sqrt[3]{2x-3}+1\right)}\right]$	0.5
$=\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{3x^2+x+2}{(x+2)\left(x\sqrt{3x-5}+2\right)}+\dfrac{2}{(x+2)\left(\left(\sqrt[3]{2x-3}\right)^2+\sqrt[3]{2x-3}+1\right)}\right]$	0.5

$=\dfrac{16}{4.4}+\dfrac{2}{4.3}=\dfrac{7}{6}$	0.5

Câu 3a.*(1,5 điểm)* a) Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $C_{n+4}^{n+1}-4n=C_{n+3}^{n}+8$. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $P=x(1-2x)^n+x^2(1+3x)^{2n}$.

ĐK: $n\in N^*$, ta có $C_{n+4}^{n+1}-4n=C_{n+3}^{n}+8 \Leftrightarrow \dfrac{(n+4)(n+3)}{6}-\dfrac{(n+3)(n+1)}{6}=4 \Leftrightarrow 3n=15 \Leftrightarrow n=5.$	0.5
Với $n=5,$ ta có $P=x(1-2x)^5+x^2(1+3x)^{10}$ Xét khai triển: $x(1-2x)^5=x\sum_{k=0}^{5}C_5^k(-2x)^k \Rightarrow$ hệ số chứa x^5 ứng với $k=4$ và ta có hệ số chứa x^5 trong khai triển $x(1-2x)^5$ là $C_5^4(-2)^4=80$	0.5
Xét khai triển: $x^2(1+3x)^{10}=x^2\sum_{m=0}^{10}C_{10}^k(3x)^m \Rightarrow$ hệ số chứa x^5 ứng với $m=3$ và ta có hệ số chứa x^5 trong khai triển $x^2(1+3x)^{10}$ là $C_{10}^3.3^3=3240.$ Vậy hệ số của x^5 trong khai triển $P=x(1-2x)^n+x^2(1+3x)^{2n}$ là $a_5=80+3240=3320.$	0.5

Câu 3b.*(1,5 điểm)* b) Cho tập hợp $X=\{0;1;2;3;4;5;6\}$. Gọi Ω là tập hợp các số tự nhiên chẵn có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các phần tử của *X*. Lấy ngẫu nhiên 2 số tự nhiên từ Ω. Tính xác suất sao cho 2 số được chọn chia hết cho 5.

Gọi STN chẵn có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các phần tử của X có dạng $\overline{abcd}$ với $a\neq 0$ TH1: Nếu d = 0 Mỗi cách chọn a, b, c là một chỉnh hợp chập 3 của 6. Do đó có $1.A_6^3=120$ số	0.25
TH2: Nếu $d\neq 0$, chọn d có 3 cách. Chọn a có 5 cách chọn (vì $a\neq 0$) Mỗi cách chọn b, c là một chỉnh hợp chập 2 của 5. Do đó có 3.5. $A_5^2=300$ số $\Rightarrow n(\Omega)$ = 120 + 300 = 420 số. Số cách lấy ra 2 phần tử của Ω là $C_{420}^2=87990$	0.5
Gọi A là biến cố " Hai số được chọn trong Ω là 2 số chia hết cho 5". Số các số tự nhiên chẵn có hai chữ số chia hết cho 5 là 120 $\Rightarrow n(A)=C_{120}^2=7140$	0.5
$P(A)=\dfrac{7140}{87990}=\dfrac{34}{419}$	0.25

Câu 4.*(3,0 điểm)* Cho dãy số (u_n) có $\begin{cases} u_1=2011, u_2=2014 \\ u_{n+2}=\dfrac{5}{3}u_{n+1}-\dfrac{2}{3}u_n, n\in N^* \end{cases}$

a) Đặt $v_n=u_{n+1}-u_n, \forall n\in N^*$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) là một cấp số nhân.

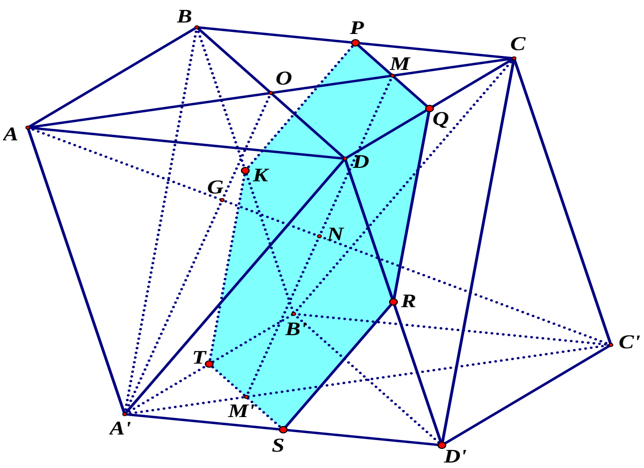
b) Tính giới hạn $\lim u_n$

a) Ta có $v_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1}=\dfrac{5u_{n+1}-2u_n}{3}-u_{n+1}=\dfrac{2}{3}(u_{n+1}-u_n)=\dfrac{2}{3}v_n, \quad \forall n\in N^*$	0.5
Từ định nghĩa cấp số nhân ta có dãy số (v_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $v_1=u_2-u_1=3$ và công bội $q=\dfrac{2}{3}$.	0.5

b) Từ câu a) ta có n số hạng của cấp số nhân (v_n) là: $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n = \dfrac{v_1(1-q^n)}{1-q} = 9\left[1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]$	0.5
Mặt khác ta có: $v_1 = u_2 - u_1$ $v_2 = u_3 - u_2$ $v_3 = u_4 - u_3$ .... $v_{n-2} = u_{n-1} - u_{n-2}$ $v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$	0.5
Cộng theo vế ta có: $v_1 + v_2 + ... + v_{n-1} = u_n - u_1$. Từ đó suy ra công thức tổng quát của dãy số (u_n) là: $u_n = S_{n-1} + u_1 = 9\left[1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\right] + 2011$	0.5
Do đó giới hạn $\lim u_n = \lim\left(9\left[1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\right] + 2011\right) = 9 + 2011 = 2020$. Vậy $\lim u_n = 2020$	0.5

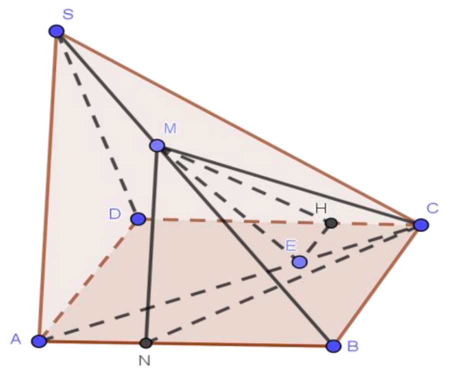
Câu 5a.*(2,5 điểm)*

a) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên đường chéo AC lấy điểm M sao cho $MA = 3MC$. Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với mặt phẳng $(A'BD)$. Xác định thiết diện của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ khi cắt bởi mặt phẳng (α).

	0.5
Xét hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(CB'D')$ có $\begin{cases} BD // B'D' \\ A'B // D'C \end{cases} \Rightarrow (A'BD) // (CB'D')$, Mà $(\alpha) // (A'BD)$ do đó $(\alpha) // (CB'D')$.	0.5
Từ đó ta có cách dựng thiết diện: Trong *(ABCD)* dựng đường thẳng qua *M* song song *BD* cắt *BC* tại *P* và cắt *CD* tại *Q*.	0.5
Trong *(CDD'C')* dựng đường thẳng qua *Q* song song *CD'* cắt *DD'* tại *R;* Trong *(ADD'A')* dựng đường thẳng đi qua *R* song song *A'D* cắt *A'D'* tại *S;* Trong *(A'B'C'D')* dựng đường thẳng qua *S* song song *B'D'* cắt *A'B'* tại *T;* Trong *(ABB'A')* dựng đường thẳng qua *T* song song *A'B* cắt *BB'* tại *K.*	0.5
Thiết diện là lục giác *PQRSTK.*	0.5

Câu 5b.*(2,5 điểm)*

b) Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình vuông cạnh *a* và các cạnh bên đều bằng *a*. Gọi *M* là điểm nằm trên *SB* sao cho $\overrightarrow{SM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$. Gọi *(P)* là mặt phẳng chứa *CM* và song song với *SA*. Tính theo *a* diện tích thiết diện tạo bởi *(P)* và hình chóp *S.ABCD*.

	0.5
Từ M kẻ $MN//SA\,(N\in AB)$. Chứng minh thiết diện là tam giác CMN.	0.5
Ta có: $\frac{MN}{SA}=\frac{BM}{BS}=\frac{2}{3}\Rightarrow MN=\frac{2a}{3}$. Xét ΔSMC có: $MC^2=SM^2+SC^2-2.SM.SC.\cos MSC=\frac{a^2}{9}+a^2-2.\frac{a}{3}.a.\frac{1}{2}=\frac{7a^2}{9}\Rightarrow MC=\frac{a\sqrt{7}}{3}$. $CN=\sqrt{BN^2+CB^2}=\sqrt{\frac{4a^2}{9}+a^2}=\frac{\sqrt{13}a}{3}$.	0.5
Có $\cos CMN=\frac{MN^2+MC^2-CN^2}{2.MC.MN}=\frac{\frac{4a^2}{9}+\frac{7a^2}{9}-\frac{13a^2}{9}}{2.\frac{a\sqrt{7}}{3}.\frac{2a}{3}}=\frac{-\sqrt{7}}{14}\Rightarrow \sin CMN=\sqrt{1-\cos^2 CMN}=\frac{3\sqrt{21}}{14}$.	0.5
Diện tích thiết diện là: $S_{\Delta CMN}=\frac{1}{2}.MC.MN.\sin CMN=\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{7}}{3}.\frac{2a}{3}.\frac{3\sqrt{21}}{14}=\frac{\sqrt{3}}{6}a^2$ (đvdt).	0.5

Câu 6.*(2,0 điểm)* Cho 3 số thực dương *a, b, c* thoả mãn *a.b.c = 1*. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(b+a)}$.

Đặt $x=\frac{1}{a},y=\frac{1}{b},z=\frac{1}{c}$. Do $abc=1\;\Rightarrow\; xyz=1$. Khi đó: $P=\frac{x^3}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}+\frac{y^3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}}+\frac{z^3}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}=\frac{x^3yz}{y+z}+\frac{y^3xz}{z+x}+\frac{z^3xy}{x+y}=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$	0.5
Áp dụng bđt Co-si: $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y+z}{4}\geq x$, $\frac{y^2}{z+x}+\frac{z+x}{4}\geq y$, $\frac{z^2}{x+y}+\frac{x+y}{4}\geq z$.	0.5
$P=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{x+y+z}{2}\geq\frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz}=\frac{3}{2}$	0.5
Giá trị nhỏ nhất của *P* bằng $\frac{3}{2}$ đạt khi *a = b = c = 1*.	0.5

Chú ý: Cách giải khác nếu đúng vẫn cho điểm tương tự.